

1 Verzamelingen en afbeeldingen

Notaties:

- $A = \{1, 2, 3\}, \emptyset,$
- $x \in A, y \notin A,$
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A,$
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$
- $\mathbb{Q} = p/q,$ met $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0,$
- \mathbb{R} : reële getallen,
- \mathbb{C} : complexe getallen,
- $\{x \in A : E(x)\}$: alle elementen van A met eigenschap $E,$
- begrensde intervallen:
 - open interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$
 - gesloten interval $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$
- onbegrensd interval: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$
- Cartesisch product $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ (verzameling geordende paren).

Operaties:

- complement $A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega : x \notin A\},$
- vereniging $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ of } x \in B\},$
- doorsnede $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \in B\},$
- verschil $A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ en } x \notin B\},$
- A en B disjunct: $A \cap B = \emptyset,$
- gegeven: verzameling $\Omega,$ verzameling $L,$
 - voor alle $\lambda \in L: A_\lambda$ een deelverzameling van $\Omega:$
 - $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{voor alle } \lambda \in L \text{ geldt } x \in A_\lambda\},$
 - $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x \in \Omega : \text{er is een } \lambda \in L \text{ met } x \in A_\lambda\},$
- Venn-diagrammen.

Een **functie** (afbeelding) van A (domein) naar B (codomein) is een tripel $(A, B, f),$ met f een deelverzameling van $A \times B,$ met:

voor alle $a \in A$ bestaat precies één $b \in B$ zó dat $(a, b) \in f;$

notatie: $f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a);$

notatie: $(a, b) \in f: f(a) = b,$ met a : origineel, b : beeld.

Gegeven: $f : A \rightarrow B$:

- f injectief: voor elke $b \in B$ ten hoogste één element $a \in A$ met $f(a) = b$ (elk beeld maar één keer gebruikt),
 - f surjectief: voor elke $b \in B$ ten minste één element $a \in A$ met $f(a) = b$ (elk beeld wordt bereikt),
 - f bijectief: f zowel injectief als surjectief, m.a.w. voor elke $b \in B$ precies één element $a \in A$ met $f(a) = b$;
- notatie: beeld $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$.

Gegeven: $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$;

samengestelde functie $(g \circ f)(a) = g(f(a))$;

associatief: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Identieke functie: $f : A \rightarrow A, a \mapsto a$.

Gegeven: $f : A \rightarrow B$ bijectief;

inverse functie $f^{-1} = g : B \rightarrow A : g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Gegeven: $f : A \rightarrow B, C \subseteq B$;

inverse beeld van C onder f : $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$.

Verzamelingen A en B heten gelijkmachtig (equipotent) als bijectie $f : A \rightarrow B$ bestaat.

Gegeven: verzameling A :

- eindig: er bestaat een getal n zó dat $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en A gelijkmachtig, anders: oneindig,
- aftelbaar oneindig: A en \mathbb{N} gelijkmachtig,
- aftelbaar: eindig of aftelbaar oneindig,
- overaftelbaar: niet aftelbaar.

Er geldt:

- natuurlijke getallen \mathbb{N} zelf zijn aftelbaar,
- gehele getallen \mathbb{Z} zijn aftelbaar (definieer bijectie),
- rationale getallen \mathbb{Q} zijn aftelbaar (definieer bijectie),
- reële getallen \mathbb{R} zijn overaftelbaar (Cantor's diagonaal-argument op decimale ontwikkeling).

2 Getallen

Axioma's voor \mathbb{N} :

gegevens:

- (a) verzameling \mathbb{N} ,
- (b) elementen 0 en 1 in \mathbb{N} ,
- (c) optelling: afbeelding $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,
- (d) vermenigvuldiging: afbeelding \cdot : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$;

eigenschappen:

- (N0) elementen 0 en 1 zijn verschillend,
- (N1) element 0 is het kleinst;
er is geen element $a \in \mathbb{N}$ waarvoor $1 + a = 0$,
- (N2) inductie: gegeven $A \subseteq \mathbb{N}$:
als $0 \in A$ en $a \in A \Rightarrow 1 + a \in A$, dan $A = \mathbb{N}$
(alle elementen vanaf 0 zitten in A),
- (N3) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $a + b = b + a$,
- (N4) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- (N5) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{N}$: $0 + a = a$,
- (N6) schrapwet voor optelling: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a + b = a + c \Rightarrow a = c$,
- (N7) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
- (N8) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (N9) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{N}$: $1 \cdot a = a$,
- (N10) schrapwet voor vermenigvuldiging:
voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$, met $a \neq 0$: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a = c$,
- (N11) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ordering \leq op \mathbb{N} :

gegeven $a, b \in \mathbb{N}$: $a \leq b$ als een $c \in \mathbb{N}$ bestaat met $b = a + c$;

$a < b$ als $a \leq b$ en $a \neq b$;

$a \geq b$ als $b \leq a$.

Eigenschappen van \leq :

- (N12) voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \Rightarrow a = b$,
- (N13) voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \Rightarrow a \leq c$,
- (N14) voor alle $a, b \in \mathbb{N}$: $(a \leq b) \vee (b \leq a)$,
- (N15) voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a \leq b \Rightarrow ((a + c) \leq (b + c))$,
- (N16) voor alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $(a \leq b) \Rightarrow (ac \leq bc)$.

Axioma's voor \mathbb{Z} :

gegevens:

- (a) verzameling \mathbb{Z} ,
- (b) elementen 0 en 1 in \mathbb{Z} ,
- (c) optelling: afbeelding $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
- (d) vermenigvuldiging: afbeelding \cdot : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$;

eigenschappen:

- (Z0) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $a + b = b + a$,
- (Z1) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- (Z2) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{Z}$: $0 + a = a$,
- (Z3) additieve inversen (onderscheid t.o.v. \mathbb{N}):
 voor iedere $a \in \mathbb{Z}$ bestaat een $b \in \mathbb{Z}$ met $a + b = 0$;
 notatie: $b = -a$,
- (Z4) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
- (Z5) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (Z6) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{Z}$: $1 \cdot a = a$,
- (Z7) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- (Z8) als voor $A \subseteq \mathbb{Z}$ geldt: $0 \in A, 1 \in A$ en
 $(a, b \in A) \Rightarrow ((-a \in A) \wedge (a + b \in A) \wedge (ab \in A))$,
 dan $A = \mathbb{Z}$,
- (Z9) verzameling \mathbb{Z} is niet eindig.

Er geldt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Verschil: $a - b = a + (-b)$;

aftrekken: afbeelding $-$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a - b$.

Ordering \leq op \mathbb{Z} :

gegeven $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \leq b$ als een $c \in \mathbb{N}$ bestaat met $b = a + c$;

$a < b$ als $a \leq b$ en $a \neq b$;

$a \geq b$ als $b \leq a$.

Axioma's voor \mathbb{Q} :

gegevens:

- (a) verzameling \mathbb{Q} ,
- (b) elementen 0 en 1 in \mathbb{Q} ,
- (c) optelling: afbeelding $+$: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$,
- (d) vermenigvuldiging: afbeelding \cdot : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$;

eigenschappen:

(Q0) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$: $a + b = b + a$,

(Q1) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(Q2) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{Q}$: $0 + a = a$,

(Q3) additieve inversen: voor iedere $a \in \mathbb{Q}$ bestaat een $b \in \mathbb{Q}$ met $a + b = 0$;
notatie: $b = -a$,

(Q4) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \cdot b = b \cdot a$,

(Q5) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

(Q6) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{Q}$: $1 \cdot a = a$,

(Q7) multiplicatieve inversen (onderscheid t.o.v. \mathbb{Z}):

voor iedere $a \in \mathbb{Q}$ met $a \neq 0$ bestaat een $b \in \mathbb{Q}$ met $a \cdot b = 1$;

notatie: $b = 1/a$,

(Q8) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(Q9) als voor $A \subseteq \mathbb{Q}$ geldt: $0 \in A, 1 \in A$,

$(a \in A) \Rightarrow (-a \in A), (0 \neq a \in A) \Rightarrow (1/a \in A)$,

$(a, b \in A) \Rightarrow ((a + b \in A) \wedge (ab \in A))$,

dan $A = \mathbb{Q}$,

(Q10) verzameling \mathbb{Q} is niet eindig.

Er geldt: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Elk element van \mathbb{Q} is van de vorm a/b , met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$.

Delen: afbeelding $/ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$, met $b \neq 0$;

notatie: $a \cdot b^{-1} = a/b$.

Ordering \leq op \mathbb{Q} :

gegeven $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \leq b$ als $c, d \in \mathbb{N}$ bestaan, met $d \neq 0$, zó dat $b = a + c/d$;

$a < b$ als $a \leq b$ en $a \neq b$;

$a \geq b$ als $b \leq a$.

Volledige inductie:

bewijs volgens volledige inductie: bewijstechniek voor stellingen over natuurlijke getallen, gebaseerd op Principe van Volledige Inductie.

1. check de bewering voor $n = 0$,

2. inductieveronderstelling: neem aan dat de bewering waar voor n ,

3. bewijs op basis daarvan de bewering voor $n + 1$.

Gegeven: verzameling A ;

een **relatie** op A is een deelverzameling \sim van het Cartesisch product $A \times A$;

twee elementen a en b uit A zijn in relatie \sim als $(a, b) \in \sim$;

notatie: $a \sim b$.

Equivalentie-relatie: een relatie \sim op verzameling A is een equivalentie-relatie als:

- (i) reflexief: voor alle $x \in A$: $x \sim x$,
- (ii) symmetrisch: voor alle $x, y \in A$: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$,
- (iii) transitief: voor alle $x, y, z \in A$: $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$.

Een equivalentie-relatie op een verzameling verdeelt (partioneert) die in disjuncte deelverzamelingen (**equivalentieklassen**).

Gegeven: verzameling A en equivalentie-relatie \sim op A :
 afbeelding $q : A \rightarrow B$ is een **quotiënt-afbeelding** voor \sim als:

1. q is surjectief,
 2. voor alle $x, y \in A$: $x \sim y \Leftrightarrow q(x) = q(y)$.
- (betekenis: een afbeelding naar identificaties voor equivalentie-classes)

Axioma's voor \mathbb{R} :

gegevens:

- (a) verzameling \mathbb{R} ,
- (b) twee verschillende elementen 0 en 1 in \mathbb{R} ,
- (c) optelling: afbeelding $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (d) vermenigvuldiging: afbeelding \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (e) ordening: relatie $>$ op \mathbb{R} ;

eigenschappen:

- (R0) optelling is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$,
- (R1) optelling is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- (R2) 0 is neutraal voor optelling: voor alle $a \in \mathbb{R}$: $0 + a = a$,
- (R3) additieve inversen: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ bestaat een $b \in \mathbb{R}$ met $a + b = 0$;
 notatie: $b = -a$,
- (R4) vermenigvuldiging is commutatief: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$,
- (R5) vermenigvuldiging is associatief: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (R6) 1 is neutraal voor vermenigvuldiging: voor alle $a \in \mathbb{R}$: $1 \cdot a = a$,
- (R7) multiplicatieve inversen:
 voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ bestaat een $b \in \mathbb{R}$ met $a \cdot b = 1$;
 notatie: $b = 1/a$,
- (R8) distributieve eigenschap: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- (R9) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a = b$, $a > b$ of $b > a$,
- (R10) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: als $a > 0$ en $b > 0$, dan $a + b > 0$ en $a \cdot b > 0$,
- (R11) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$: $a > b$ desda. $a - b > 0$,
- (R12) Archimedische eigenschap: voor iedere $x \in \mathbb{R}$: er is een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $x < n$.

(R13) Fundamentele eigenschap van \mathbb{R} :

iedere niet-lege, naar boven begrensde deelverzameling van \mathbb{R} heeft een unieke kleinste bovengrens (supremum),
 iedere niet-lege, naar beneden begrensde deelverzameling van \mathbb{R} heeft een unieke grootste ondergrens (infimum)
 (onderscheid t.o.v. \mathbb{Q} : \mathbb{R} bevat geen gaten).

Verschil: $a - b = a + (-b)$.

Quotiënt: voor $b \neq 0$: $a/b = a \cdot b^{-1}$.

Notaties:

als $a > 0$ heet a positief,

$\mathbb{R}_{>0}$: verzameling van positieve reële getallen,

relatie $<$ op \mathbb{R} : $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b > a\}$,

dus voor $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b \Leftrightarrow b > a$,

als $a < 0$ heet a negatief,

$a \geq b$: a groter of gelijk aan b .

Een deelverzameling V van \mathbb{R} :

(i) naar boven begrensd:

er bestaat een (bovengrens) $x \in \mathbb{R}$ zó dat $v \leq x$ voor alle $v \in V$,

(ii) naar beneden begrensd:

er bestaat een (ondergrens) $x \in \mathbb{R}$ zó dat $v \geq x$ voor alle $v \in V$,

(iii) **begrensd**: als V zowel naar boven als naar beneden begrensd.

Let op: een verzameling hoeft geen boven/ondergrens te hebben.

Een deelverzameling V van \mathbb{R} :

(i) **supremum** x van V ($\sup V$): kleinste bovengrens van V , d.w.z.

- x is bovengrens voor V ,
- als y bovengrens voor V , dan $y \geq x$,

(ii) **infimum** x van V ($\inf V$): grootste ondergrens van V , d.w.z.

- x is ondergrens voor V ,
- als y ondergrens voor V , dan $y \leq x$.

Gegeven: niet-lege, deelverzameling V van \mathbb{R} :

(i) $v \in V$ **maximum** voor V ($\max V$) als $v \geq u$ voor alle $u \in V$,

(ii) $v \in V$ **minimum** voor V ($\min V$) als $v \leq u$ voor alle $u \in V$.

Gegeven: niet-lege, deelverzameling V van \mathbb{R} , dan equivalent:

- (i) V heeft een maximum,
- (ii) V naar boven begrensd en $\sup V \in V$,
(dan geldt: $\max V = \sup V$)

en:

- (i) V heeft een minimum,
- (ii) V naar beneden begrensd en $\inf V \in V$.
(dan geldt: $\min V = \inf V$)

Let op: verzameling V mag niet leeg zijn.

3 Ongelijkheden

Driehoeksongelijkheid: voor alle $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

4 Reële rijen

Gegeven verzameling A : een **rij** in A is een functie $a : \mathbb{N} \rightarrow A$;

notaties: termen $a(n) : a_n$, afbeelding $a : \mathbb{N} \rightarrow A : (a_n)_{n \geq 0}$ of $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

reële rij: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ($A = \mathbb{R}$);

indexverzameling: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Deelrij $(b_k)_{k \geq 0}$ van rij $(a_n)_{n \geq 0}$:

als een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k \geq 0}$ bestaat

zó dat voor alle $k \in \mathbb{N}$: $b_k = a_{n_k}$ (een index op een index).

Een reële rij $(a_n)_{n \geq 0}$ heet **convergent** als een (limiet) $a \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat:

voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$;

(willekeurig kleine band rond “eindpunt”)

notatie: limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$;

een rij die niet convergent is, heet **divergent**.

Een reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$ divergeert naar oneindig
als voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$: $x_n \geq \xi$;
notatie: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$;
analoog voor divergentie naar $-\infty$.

Insluitstelling (“sandwich-stelling”):

gegeven $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ en $(z_n)_{n \geq 0}$ reële rijen met $x_n \leq y_n \leq z_n$ voor alle $n \geq 0$;
als rijen $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(z_n)_{n \geq 0}$ beide convergent met limiet a ,
dan convergeert rij $(y_n)_{n \geq 0}$ ook met limiet a .

Rekenregels:

gegeven: reële rijen $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ convergent
met respectievelijk $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$:

- (i) voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: rij $(\alpha x_n)_{n \geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha x_n = \alpha x$,
- (ii) somrij $(x_n + y_n)_{n \geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$,
- (iii) productrij $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$,
- (iv) neem aan $x \neq 0$; er is een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geq N$: $x_n \neq 0$;
(alleen de staart moet ongelijk 0 zijn)
rij $(1/x_n)_{n \geq 0}$ convergent met limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 1/x$

(hulpstelling) Gegeven: reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$:
begrensd als een getal $G \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $|x_n| \leq G$.

Gegeven: reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$:

- **stijgend**: als $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$,
 - **strikt stijgend**: als $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$;
- analoog voor dalende en strikt dalende rijen.

Monotone convergentiestelling:

iedere stijgende en naar boven begrensde reële rij convergeert naar zijn supremum.

Gegeven: reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$:

Cauchy-rij: als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat
zó dat voor alle $n \geq N$: $|x_n - x_N| < \varepsilon$.

(betekenis: variatie van x blijft in een steeds kleiner wordende band)

Volledigheidsstelling: iedere Cauchy-rij is convergent, en andersom.

(koppelt band t.o.v. punt X_N aan convergentie t.o.v. limiet)

(hulpstelling) Iedere Cauchy-rij is begrensd.

Bolzano-Weierstrass: iedere begrensde reële rij heeft een convergente deelrij.

5 Continuïteit

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, punt $c \in D$:

functie f **continu** in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ met $|x - c| < \delta$: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

functie f heet continu als deze continu is in ieder punt van D ;

functie f links continu in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ met $c - \delta < x \leq c$: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$;

functie f rechts continu in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ met $c < x \leq c + \delta$: $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Rekenregels:

gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, functies $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, beide continu in punt $c \in D$:

- (i) voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: functie $\alpha f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continu in punt c ,
- (ii) somfunctie $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continu in punt c ,
- (iii) productfunctie $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ continu in punt c ,
- (iv) neem aan dat $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$;
reciproke functie $1/f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/f(x)$ continu in punt c ;

gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, functies $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, met $f[D] \subseteq E$, f continu in punt $c \in D$:

- (v) samengestelde functie $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continu in punt c .

Let op: voor continuïteit hoeft alleen te gelden: $c \in D \subseteq \mathbb{R}$.

(hulpstelling) Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, punt $c \in D$:

equivalent:

- (i) functie f continu in punt c ,
- (ii) voor iedere rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in D met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ geldt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$:

c is een **verdichtingspunt** van D als voor iedere $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ een $x \in D \setminus \{c\}$ bestaat zó dat $|x - c| < \delta$.

(betekenis: punt c ligt ingebed in verzameling D of er oneindig dicht tegenaan (open interval))

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ verdichtingspunt van D :

$L \in \mathbb{R}$ is de **limiet** van f in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ met $0 < |x - c| < \delta$: $|f(x) - L| < \varepsilon$;

notatie: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$;

gegeven: $c \in \mathbb{R}$ verdichtingspunt van $\{x \in D : x < c\}$:

$L \in \mathbb{R}$ is de linker limiet van f in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ met $c - \delta < x < c$: $|f(x) - L| < \varepsilon$;

notatie: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$;

gegeven: $c \in \mathbb{R}$ verdichtingspunt van $\{x \in D : x > c\}$:

$L \in \mathbb{R}$ is de rechter limiet van f in c als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat voor alle $x \in D$ met $c < x < c + \delta$: $|f(x) - L| < \varepsilon$;

notatie: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$.

Gegeven: $c \in \mathbb{D}$ verdichtingspunt van D :

functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is continu in punt c desda. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, c verdichtingspunt van D :

voor $L \in \mathbb{R}$ zijn deze uitspraken equivalent:

- (i) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$,
- (ii) voor iedere rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in $D \setminus \{c\}$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Rekenregels:

gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$, functies $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : D \rightarrow \mathbb{R}$,

punt $a \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van D :

- (a) als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$,
- (b) als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$,
- (c) neem aan dat $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in D$;
als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ en $M \neq 0$,
dan $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = L/M$,
- (d) voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$: als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot L$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$:

functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is **uniform continu** als voor iedere $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat

zó dat voor alle $x, y \in D$ met $|x - y| < \delta$ geldt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

(betekenis: continuïteit onafhankelijk van punt c ;

of: richtingscoëfficiënt van f is begrensd)

dus elke uniform continue functie is continu.

Let op: geldt voor hele functie.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

iedere continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is uniform continu.

Nulpuntstelling:

gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $f(a) < 0 < f(b)$,

dan is er een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt: $f(\xi) = 0$.

(betekenis: je moet door 0 om van $f(a)$ naar $f(b)$ te gaan)

Tussenwaardstelling:

gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $f(a) < f(b)$,

dan is er voor iedere $C \in [f(a), f(b)]$ een $c \in [a, b]$ waarvoor geldt: $f(c) = C$.

(betekenis: veralgemenisering van Nulpuntstelling)

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$:

als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu,

dan heeft de verzameling $f[[a, b]] = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ een maximum en een minimum.

Let op: voor de limiet hoeft c alleen verdichtingspunt te zijn van $D \subseteq \mathbb{R}$.

6 Afgeleiden

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$:

verzameling D heet **open** in \mathbb{R}

als voor iedere $x \in D$ een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zó dat $(x - \delta, x + \delta) \subseteq D$.

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$ open, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in D$:

functie f heet **differentieerbaar** in c als de limiet $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ bestaat;

deze limiet heet de afgeleide van f in c ; notatie: $f'(c)$;

functie f heet differentieerbaar als f differentieerbaar in ieder punt van D .

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$ open, $c \in D$:

als $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in c , dan is f continu in c .

(hulpstelling) **Linearisering**:

gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$ open, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in D$, $L \in \mathbb{R}$:

equivalente uitspraken:

(i) f is differentieerbaar in c en $f'(c) = L$,

(ii) er bestaat een functie $\tilde{F} : D \rightarrow \mathbb{R}$, continu in c ,

zó dat $\tilde{F}(c) = 0$ en voor elke $x \in D$ geldt: $f(x) = f(c) + L \cdot (x - c) + (x - c) \cdot \tilde{F}(x)$.

(betekenis: $\tilde{F}(x)$ geeft een maat voor de fout t.o.v. punt c)

(betekenis: rond het punt c is $f(x)$ bij benadering gelijk aan zijn linearisering)

Kettingregel:

gegeven: D_1, D_2 open deelverzamelingen van \mathbb{R} ,

$f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f[D_1] \subseteq D_2$,

$c \in D_1$, f differentieerbaar in c , g differentieerbaar in $f(c)$:

dan is ook samengestelde functie $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in c ,
en geldt: $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

Rekenregels:

gegeven: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

als f en g differentieerbaar in c , dan:

(i) αf differentieerbaar in c met afgeleide $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$,

(ii) $f + g$ differentieerbaar in c met afgeleide $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$,

(iii) $f \cdot g$ differentieerbaar in c met afgeleide $(f \cdot g)'(c) = f(c) \cdot g'(c) + f'(c) \cdot g(c)$,

(iv) als $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$:

$1/g$ differentieerbaar in c met afgeleide $(1/g)'(c) = -g'(c)/(g(c))^2$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar:

functie f is stijgend desda. $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, b)$.

(betekenis: **richtingscoëfficiënt**)

(hulpstelling) Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
 f neemt een minimum of maximum aan in punt $c \in (a, b)$:
als f differentieerbaar in c , dan geldt: $f'(c) = 0$.
(betekenis: richtingscoëfficiënt is nul in minima en maxima)

Stelling van Rolle:

gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue functie differentieerbaar op (a, b) :
als $f(a) = f(b) = 0$, dan bestaat een $\xi \in (a, b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Middelwaardestelling:

gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue functie differentieerbaar op (a, b) :
er bestaat een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
(betekenis: veralgemenisering van Stelling van Rolle)

Let op: voor differentieerbaarheid moet gelden: $c \in D \subseteq \mathbb{R}$, met D open.

7 Riemann-integraal

Gegeven: $D \subseteq \mathbb{R}$:
functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heet **begrensd**
als een $G \in \mathbb{R}$ bestaat zó dat $|f(x)| < G$ voor alle $x \in D$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$:
een **partitie** van interval $[a, b]$ is een eindige verzameling $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ punten uit $[a, b]$ met $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$;
maaswijdte van P : $\mu(P) = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}$;
(betekenis: een partitie verdeelt een interval in deelintervallen)
partitie P_2 is een verfijning van partitie P_1 als $P_2 \subseteq P_1$;
partitie $P_1 \cup P_2$ is een verfijning van zowel P_1 als P_2 .

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie,
 $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ een partitie van $[a, b]$:
 definieer voor $i = 1, 2, \dots, n$:

- $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$,
- $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$,
- $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Bovensom: $U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i$;
ondersom: $L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie:
bovenintegraal van f over $[a, b]$: $\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{U(P, f) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$;
onderintegraal van f over $[a, b]$: $\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{L(P, f) : P \text{ is een partitie van } [a, b]\}$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie:
 f heet **Riemann-integreerbaar** over $[a, b]$
 als bovenintegraal $\overline{\int_a^b} f(x) dx$ en onderintegraal $\underline{\int_a^b} f(x) dx$ van f aan elkaar gelijk zijn:
 hun gemeenschappelijke waarde heet dan de Riemann-integraal van f over $[a, b]$: $\int_a^b f(x) dx$.

Afspraken:

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$,
- $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Elke continue reële functie op een gesloten en begrensd interval is Riemann-integreerbaar.
 (volgt uit constructie: begrensd in x - en y -richting)

Functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar als differentieerbaar in ieder punt van $[a, b]$;
 F continu differentieerbaar als F differentieerbaar en afgeleide F' continu op $[a, b]$.

Hoofdstelling van de Integraalrekening:

gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu (dus begrensd):
 functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd als $F(x) = \int_a^x f(t) dt$;
 dan F continu differentieerbaar en voor alle $x \in [a, b]$ geldt: $F'(x) = f(x)$.

Gegeven: $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$,

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) met $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in (a, b)$;

dan geldt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Let op: voor Riemann-integreerbaarheid moet f begrensd zijn.